

赋 s 范数的 Orlicz 函数空间的单调性

王俊明, 佟秋谊

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 单调性是 Banach 空间几何学的重要内容。研究赋 s -范数 Orlicz 函数空间的单调性, 并给出 s -范数的一些基本性质。在此基础上, 得到了赋 s -范数 Orlicz 空间严格单调性和局部单调性的判据。

关键词: s -凸函数; Orlicz 空间; 单调性

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.03.021

中图分类号: O177.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-2683(2021)03-0140-07

Monotonicity of Orlicz Function Space-equipped with S-norm

WANG Jun-ming, TONG Qiu-yi

(Department of Applied Mathematics, Harbin University of Science And Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Monotonicity is important to Banach space geometry. In this paper, the monotonicity of Orlicz spaces equipped with the s -norm are discussed. First, we gave some basic properties of the spaces. Using these properties, we obtained the criteria for strict monotonicity and upper local uniformly monotonicity in Orlicz spaces equipped with s -norm.

Keywords: s -convex function; Orlicz spaces; monotonicity

0 引 言

众所周知, Banach 空间的单调性是 Banach 空间^[1]几何理论重要内容之一, 而 Orlicz 空间作为一类特殊的 Banach 空间, 1932 年波兰著名数学家 W. Orlicz^[2]给出了 Orlicz 空间^[3] L_Φ 的定义并引入了 Orlicz 范数^[4]。自此之后, 经过越来越多的人对其研究, Orlicz 空间理论^[5-7]得到了长足的发展。自 1999 年, 刘延明等^[8]给出了 Orlicz 函数空间的一致单调性与严格单调性的判据。人们在此之后又对单调性进行深入研究。例如: 2004 年, H. Hudzik、刘新

波等^[9]讨论了赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 函数空间的单调点。2005 年, 崔云安、H. Hudzik 等^[10]给出了赋 Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 空间具有严格单调性、一致单调性、上(下)局部一致单调性的判据。与此同时得到了许多重要的结果。近年来, Orlicz 空间的单调性在各个领域的应用越来越广泛。迄今为止, 关于赋 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数^[11,12]以及 p -Amemiya 范数^[10-11]的 Orlicz 空间性质的研究已经相对成熟。本文研究具有比上述三种范数有着更广泛意义的新范数 s -范数的 Orlicz 函数空间的单调性问题。主要给出其单调性判别准则, 并据此得到赋 s -范数 Orlicz 函数空间的严格单

收稿日期: 2020-02-02

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 王俊明(1970—), 男, 博士, 教授。

通信作者: 佟秋谊(1994—), 女, 硕士研究生, E-mail: 1781433058@qq.com。

调性等问题。

X 是线性空间, 设 (G, Σ, μ) 是有限、无原子的测度有限的测度空间。 $L^0(E)$ 表示 E 上的可测实函数全体。

1 预备知识

定义 1 称 $\Phi: R \rightarrow R^+ = [0, +\infty)$ 为 s 凸函数 $s \in (0, 1]$ 是指: 对于 $\forall \lambda \in [0, 1]$ $u, v \in R$, 有

$$\Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda^s \Phi(u) + (1 - \lambda)^s \Phi(v)。$$

当 $s = 1$ 时, s - 凸函数就是通常意义下的凸函数。

定义 2 设 L^0 表示定义在 E 上的可测实函数全体, 定义 s - 凸模 $I_\Phi(\cdot): L^0(E) \rightarrow [0, +\infty]$ 如下:

$$I_\Phi(u) = \int_E \Phi(u(t)) dt, \forall u \in L^0(E)。$$

记

$$L_\Phi = \{u \in L^0(E): \exists \lambda > 0, I_\Phi(\lambda u) < \infty\}$$

及

$$E_\Phi = \{u \in L^0(E): \forall \lambda > 0, I_\Phi(\lambda u) < \infty\}$$

则 L_Φ 或 E_Φ 是关于 Luxemburg 范数

$$\|u\|_{(\Phi)}^s = \inf\left\{k > 0; I_\Phi\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1\right\}, s \in (0, 1]$$

构成的 s - 范数 Banach 空间, 称为赋 s - 范数的 Orlicz 空间。

记为 $(L_\Phi, \|\cdot\|_{(\Phi)}^s)$ 。

定义 3 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 函数空间。若 $|f(x)| \leq |g(x)|$, 且存在一个 $e \subset E$ 满足: $\mu(e) > 0$, $|f(x)| < |g(x)|$, $x \in e$, 有 $\|f\| < \|g\|$ 。称 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格单调的。

定义 4 称 Banach 格 X 具有下局部一致单调性, 如果对任意的 $x \in X^+$, $\|x\| = 1$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(x, \varepsilon) > 0$, 使得对于任意的 $y \in X^+$, $\|y\| \geq \varepsilon$, 有

$$\|x - y\| < 1 - \delta(x, \varepsilon)$$

有关赋 Orlicz 范数、Luxemburg 范数的 Orlicz 空间的各种单调性的研究结果请参看文 [2 - 20]。

2 主要结果及证明

类似于 Orlicz 空间的定义。定义 s -Orlicz 范数如下。

定理 1 设所研究的新范数的定义为

$$\|u\|_{\Phi}^s = \inf \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ku)), s \in (0, 1]$$

下面我们来证它是一个 s - 范数。

证明: 首先证明新定义的 s - 范数满足范数的条件。

1) 正定性:

因为

$$\|u\|_{\Phi}^s = 0 \Leftrightarrow \inf \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ku)) = 0$$

从而存在 $k_n \in R^+$ 满足

$$\frac{1}{k_n^s} (1 + I_\Phi(ku)) \rightarrow 0$$

因为 $(1 + I_\Phi(ku)) \neq 0$, 于是有 $\frac{1}{k_n} \rightarrow 0$ 。从而 $k_n \rightarrow$

∞ 。假设 $u \neq 0$, 则存在一个 $a > 0$ 满足 $m(\{t \in E: |u(t)| \geq a\}) = \delta > 0$ 。因为 $\Phi(u)$ 是一个 s - 凸函数, 所以我们对于任意的 $\alpha \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha u) &= \Phi(\alpha u + (1 - \alpha)0) \\ &\leq \alpha^s \Phi(u) + (1 - \alpha)^s \Phi(0) = \alpha^s \Phi(u)。 \end{aligned}$$

从而对于任意 $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, 我们有

$$\Phi(\alpha_1) = \Phi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_2\right) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^s \Phi(\alpha_2)$$

则

$$\frac{\Phi(\alpha_1)}{\alpha_1^s} \leq \frac{\Phi(\alpha_2)}{\alpha_2^s}$$

即 $F(u) = \frac{\Phi(u)}{u^s}$ 关于 u 是单调递增函数。由单调有

界原理知:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n^s} \int_E \Phi(ku(t)) dt &\geq \frac{1}{k_n^s} \int_{\{t \in E: u(t) \geq a\}} \Phi(ku(t)) dt \geq \\ \frac{\Phi(ka)}{k_n^s} m(\{t \in E: |u(t)| \geq a\}) &\geq \\ \frac{\Phi(ka)}{k_n^s} \delta &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u^s} > 0 \end{aligned}$$

与 $\inf \frac{1}{k_n^s} (1 + I_\Phi(ku)) = 0$ 矛盾。即此范数满足正定性。

2) s - 齐次性: 对于任意实数 $a \in R$,

$$\|au\|_{\Phi}^s = \inf \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(kau)) =$$

$$\inf \frac{|a|^s}{|a|^s k^s} (1 + I_\Phi(kau)) =$$

$$|a|^s \inf \frac{1}{|a|^s k^s} (1 + I_\Phi(k|a|u)) =$$

$$|a|^s \|u\|_{\Phi}^s$$

易知此范数满足 s - 齐次性。

3) 三角不等式性: 对于任意 $u, v \in L_\Phi$, 由

$\|u\|_\Phi^s, \|v\|_\Phi^s$ 的定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, h > 0$

$$\|u\|_\Phi^s + \varepsilon \geq \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ku))$$

$$\|v\|_\Phi^s + \varepsilon \geq \frac{1}{h^s} (1 + I_\Phi(hv))$$

则

$$\begin{aligned} \|u+v\|_\Phi^s &\leq \frac{(k+h)^s}{k^s h^s} (1 + I_\Phi(\frac{kh}{k+h}(u+v))) = \\ &\frac{(k+h)^s}{k^s h^s} (1 + I_\Phi(\frac{h}{k+h}ku + \frac{k}{k+h}hv)) \leq \\ &\frac{(k+h)^s}{k^s h^s} (1 + \frac{h^s}{(k+h)^s} I_\Phi(ku) + \frac{k^s}{(k+h)^s} I_\Phi(hv)) = \\ &\frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ku)) + \frac{1}{h^s} (1 + I_\Phi(hv)) \leq \end{aligned}$$

$$\|u\|_\Phi^s + \varepsilon + \|v\|_\Phi^s + \varepsilon = \|u\|_\Phi^s + \|v\|_\Phi^s + 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\|u+v\|_\Phi^s \leq \|u\|_\Phi^s + \|v\|_\Phi^s$.

因为新定义的范数满足范数成立的3个条件, 于是 s -范数是范数.

下面证明 $\{L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^s\}$ 是完备的.

任取 $\{L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^s\}$ 的一个 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

我们首先证明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 依测度收敛的 Cauchy 列.

任取 $k_{n,m} > 0$ 满足:

$$\frac{1}{k_{n,m}^s} (1 + I_\Phi(k_{n,m}(x_n - x_m))) - \frac{1}{nm} \leq \|x_n - x_m\|_\Phi^s$$

$$\|x_n - x_m\|_\Phi^s \leq \frac{1}{k_{n,m}^s} (1 + I_\Phi(k_{n,m}(x_n - x_m)))$$

则

$$k_{n,m}^s \rightarrow +\infty, \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{I_\Phi(k_{n,m}(x_n - x_m))}{k_{n,m}^s} = 0.$$

若 $\{x_n\}$ 不是依测度收敛的 Cauchy 列, 则存在 $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ 满足:

$$m(\{t \in E: |x_n(t) - x_m(t)| \geq \varepsilon\}) \geq \delta (n \neq m)$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{\int_E \Phi(k_{n,m}(x_n(t) - x_m(t))) dt}{k_{n,m}^s} &\geq \\ \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{\int_{\{t \in E: |x_n(t) - x_m(t)| \geq \varepsilon\}} \Phi(k_{n,m}(x_n(t) - x_m(t))) dt}{k_{n,m}^s} &\geq \\ \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{\Phi(k_{n,m}\varepsilon) \delta}{k_{n,m}^s} = \varepsilon \delta \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u^s} &> 0 \end{aligned}$$

产生矛盾.

由 Riesz 定理, 存在一个可测函数 $x(t)$ 满足 $x_n(t)$ 依测度收敛于 $x(t)$.

下面我们证明 $x(t) \in L_\Phi$.

利用 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Cauchy 列, 则对于任意的可测子集 e , 我们有 $\{x_n|_e\}_{n=1}^\infty$ 也是 Cauchy 列. 从 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有等度连续积分. 故 $\{\Phi(x_n(t))\}_{n=1}^\infty$ 也具有等度连续积分. 又因为 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $M > 0$, 满足 $\|x_n\|_\Phi^s \leq M$, 因此显然有 $\|x_n\|_{(\Phi)}^s \leq \|x_n\|_\Phi^s$, 故 $\|x_n\|_{(\Phi)}^s \leq M$. 从而 $I_\Phi(\frac{x_n}{M^s}) \leq 1$.

由 Vitali 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \Phi(\frac{x_n(t)}{M^s}) dt = \int_G \Phi(\frac{x(t)}{M^s}) dt$$

即有

$$\int_G \Phi(\frac{x(t)}{M^s}) dt \leq 1$$

从而 $x \in L_\Phi$. 所以 $(L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^s)$ 是一个完备的 s -范数空间.

定理2 赋 s -范数的 Orlicz 函数空间的严格单调性.

证明: 为了方便不妨设 $0 \leq x(t) \leq y(t)$. 且存在 $e \subset E, m(e) > 0$ 满足 $x(t) < y(t), t \in e$.

下面证明 $\|x\|_\Phi^s < \|y\|_\Phi^s$. 不妨设 $\|x\|_\Phi^s = 1$, 取 $k > 0$ 满足:

$$\|y\|_\Phi^s = \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ky)) = \frac{1}{k^s} (1 + \int_G \Phi(ky(t)) dt) =$$

$$\frac{1}{k^s} (1 + \int_{G/e} \Phi(ky(t)) dt + \int_e \Phi(ky(t)) dt) >$$

$$\frac{1}{k^s} (1 + \int_{G/e} \Phi(kx(t)) dt + \int_e \Phi(kx(t)) dt) \geq$$

$$\|x\|_\Phi^s = 1$$

若 $k(y) = \emptyset$, 则 $\|y\|_\Phi^s = A \int_E |y(t)| dt$. 事实上

上 $k(y) = \emptyset$ 表明:

$$\|y\|_\Phi^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(ky)) =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \frac{\Phi(ky(t))}{k^s} dt =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\text{supp}(x)} \frac{\Phi(ky(t))}{k^s |y(t)|} |y(t)| dt =$$

$$A \int_{\text{supp}(x)} |y(t)| dt = A \int_E |y(t)| dt$$

在 $k(x) = \emptyset$ 的情形下. 若 $k(y) = \emptyset$, 则:

$$\|x\|_\Phi^s = A \int_E |x(t)| dt < A \int_E |y(t)| dt =$$

$$\|y\|_\Phi^s$$

若 $k(y) \neq \emptyset$, 则存在一个 $k > 0$ 满足:

$$\begin{aligned} \|y\|_{\Phi}^s &= \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(ky)) = \\ &= \frac{1}{k^s} (1 + \int_E \Phi(ky(t)) dt) = \\ &= \frac{1}{k^s} (1 + \int_{E \setminus e} \Phi(ky(t)) dt + \int_e \Phi(ky(t)) dt) \geq \\ &\geq \|x\|_{\Phi}^s \end{aligned}$$

证毕。

定理 3 1) $I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right) \leq 1 (x \neq \theta)$;

2) $I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right) = 1$, 对一切 $x \neq \theta$ 成立的充要

条件是 $\Phi \in \Delta_2$ 。

证明: 1) 由 $\|\cdot\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}$ 定义, 存在 $a_n \downarrow \|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}$

且 $I_{\Phi}\left(\frac{x}{a_n}\right) \leq 1$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 由 Levy 定理, 即得

$$I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right) \leq 1$$

2) 因 $I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right)$ 作为 $k > 0$ 的函数在其定义域内连

续, 而当 $\Phi \in \Delta_2$ 时 $L_{\Phi} = E_{\Phi}$ 是线性集, 故此时

$I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right)$ 的定义域为 $(0, \infty)$ 。

由连续函数介值定理, 存在 $k_0 > 0$, $I_{\Phi}\left(\frac{x}{k_0^{\frac{1}{s}}}\right) = 1$,

由 Luxemburg 定义知 $k_0 = \|x\|_{\Phi, s}$ 。从而

$I_{\Phi}\left(\frac{x}{\|x\|_{\Phi}^{\frac{1}{s}}}\right) < 1$ 是不可能的。反之若 $\Phi \notin \Delta_2$, 存

在 $u_k \uparrow \infty$ 使得 $\Phi\left(\left(1 + \frac{1}{k^s}\right) \cdot u_k\right) > 2^k \Phi(u_k) (k = 1,$

$2, \dots)$, 不妨设 $\Phi(u_1) \geq \frac{1}{mes G_0}$, 选 G 的一个互不相交

的子集列 $\{G_k\}$ 使得

$$\Phi(u_k) mes G_k = \frac{1}{2^k} (k = 1, 2, \dots)$$

定义

$$x_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \chi_{G_k}(t) (n = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $\chi_E(t)$ 表示集合 E 的特征函数, 则 $\forall n \geq 0$

$$I_{\Phi}(x_n) = \int_G \Phi(x_n(t)) dt =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi(u_k) mes G_k = \frac{1}{2^n}$$

但对任何 $l > 1$, 取 n_0 充分大使 $1 + \frac{1}{n_0} \leq l$, 则 $n \geq n_0$

时:

$$\begin{aligned} I_{\Phi}(lx_n) &= \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \Phi(lu_k) mes G_k > \\ &> \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)u_k\right) mes G_k > \\ &> \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 2^k \Phi(u_k) mes G_k = \\ &= \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 1 = \infty \end{aligned}$$

故 $\|x_n\|_{\Phi}^s \geq \frac{1}{l}$ 。由 l 的任意性 $\|x_n\|_{\Phi}^s \geq 1$ 。又

$I_{\Phi}(x_n) \leq 1$ 知 $\|x_n\|_{\Phi}^s \leq 1$ 。从而 $\|x_n\|_{\Phi}^s = 1$ 但

$I_{\Phi}(x_n) \rightarrow 0$ 。这说明对任何 $n \in N, x_n \in L_{\Phi} \setminus E_{\Phi}$ 。则存

在 $x_n(t) \in E_{\Phi}, I_{\Phi}(x_n) = \frac{1}{2^n}$, 但对任何 $I_{\Phi}(lx_n) =$

$\infty (\forall \lambda > 1)$, 由 $\|\cdot\|_{\Phi}^s$ 的定义可知 $\|x_n\|_{\Phi}^s = 1$, 矛盾。

引理 1 若 $\Phi \in \Delta_2$, 则对任何 $L > 0, \varepsilon > 0$, 存

在 $\delta > 0$, 当 $I_{\Phi}(u) \leq L, I_{\Phi}(v) \leq \delta$ 时, 就有

$$|I_{\Phi}(u+v) - I_{\Phi}(u)| < \varepsilon$$

证明:

$$I_{\Phi}(u+v) = I_{\Phi}((1-\beta)u + \beta(u+v)) =$$

$$I_{\Phi}\left((1-\beta)u + \beta\left(u + \frac{v}{\beta}\right)\right) \leq$$

$$(1-\beta)^s I_{\Phi}(u) + \beta^s I_{\Phi}\left(u + \frac{v}{\beta}\right) \leq$$

$$I_{\Phi}(u) + \beta^s I_{\Phi}\left(u + \frac{v}{\beta}\right) =$$

$$I_{\Phi}(u) + \beta^s I_{\Phi}\left(\frac{2u + 2\frac{v}{\beta}}{2}\right) \leq$$

$$I_{\Phi}(u) + \beta^2 \left(\frac{I_{\Phi}(2u) + I_{\Phi}\left(2\frac{v}{\beta}\right)}{2^s} \right) =$$

$$I_{\Phi}(u) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^s [I_{\Phi}(2u) + I_{\Phi}\left(2\frac{v}{\beta}\right)] \leq$$

$$I_{\Phi}(u) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^s \left[\int_G \Phi(2u(t)) dt + \int_G \Phi\left(2\frac{v}{\beta}\right) dt \right] \leq$$

$$I_{\Phi}(u) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^s \int_G \Phi(2u_0) dt +$$

$$\left(\frac{\beta}{2}\right)^s k \int_G \Phi(u(t)) dt + \left(\frac{\beta}{2}\right)^s \int_G \Phi\left(2\frac{v}{\beta}\right) dt$$

记 $L_0 = \Phi(2u_0) m(G) + kL \leq$

$$I_{\Phi}(u) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^s \left(L_0 + \int_G \Phi\left(2\frac{v(t)}{\beta}\right) dt \right)$$

取 β_0 充分小使得:

$$\left(\frac{\beta_0}{2}\right)^s L_0 < \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\beta_0}{2} \leq 1$$

再由 $\Phi \in \Delta_2, \exists v_0 > 0, k_1 > 0$ 满足:

$$\Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v_0\right)m(G) < \frac{\varepsilon}{4}$$

及

$$\Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v\right) \leq k_1 \Phi(v), (|v| \geq v_0) \leq$$

$$I_\Phi(u) + \frac{\varepsilon}{2} + \int_G \Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v(t)\right) dt \leq$$

$$I_\Phi(u) + \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\{t \in G: |v(t)| \leq v_0\}} \Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v(t)\right) dt +$$

$$\int_{\{t \in G: |v(t)| > v_0\}} \Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v(t)\right) dt \leq$$

$$I_\Phi(u) + \frac{\varepsilon}{2} + \Phi\left(\frac{2}{\beta_0}v_0\right)m(G) + k_1 \int_G \Phi(v(t)) dt$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4k_1}$, 则

$$\leq I_\Phi(u) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = I_\Phi(u) + \varepsilon$$

证毕。

定理 4 假设 $\Phi \in \Delta_2$, 若 $I_\Phi(x_n) \rightarrow I_\Phi(x_0)$ 且 $x_n(t) \xrightarrow{u} x_0(t)$ (依测度收敛) ($n \rightarrow \infty$), 那么 $\|x_n - x_0\|_\Phi^s \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

证明: 若 $x_0 = \theta$, 则定理自真。

今设 $x_0 \neq \theta$, 由题设, $\{I_\Phi(x_n)\}$ 有界。设 L 为其上界。由引理 1 可知存在 $\delta > 0$, 不妨认为 $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, 使得 $I_\Phi(x) \leq L, I_\Phi(y) \leq \delta$ 蕴涵

$$|I_\Phi(x+y) - I_\Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

由积分的绝对连续性, 存在 $\delta_1 > 0$, 使 $G_0 \subset G$, $mes G_0 < \delta_1$ 时 $\int_{G_0} \Phi(x_0(t)) dt < \delta$ 。因 $x_n(t) \xrightarrow{u} x_0(t)$ 。由叶果洛夫定理, 所以存在 n_1 及 $E_0 \subset G$, $mes E_0 < \delta_1$, 使 $n > n_1$ 且

$$\int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t) - x_0(t)) dt < \delta$$

注意此时 $\int_{E_0} \Phi(x_0(t)) dt < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ 成立。我们有

$$\int_{G \setminus E_0} \Phi(x_0(t)) dt = I_\Phi(x_0) -$$

$$\int_{E_0} \Phi(x_0(t)) dt > I_\Phi(x_0) - \frac{\varepsilon}{4}$$

当 $n \geq n_1$ 时, 由引理 1 得

$$\int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t)) dt = \int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t) - x_0(t)) dt + \int_{G \setminus E_0} \Phi(x_0(t)) dt >$$

$$\int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t)) dt - \frac{\varepsilon}{4} > I_\Phi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

因 $I_\Phi(x_n) \rightarrow I_\Phi(x_0)$ 存在 $n_0 \geq n_1$ 使 $n \geq n_0$ 时

$$\int_{E_0} \Phi(x_n(t)) dt = I_\Phi(x_n) - \int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t)) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

顾及 $\int_{E_0} \Phi(x_0(t)) dt < \delta, n \geq n_0$ 时

$$\int_G \Phi(x_n(t) - x_0(t)) dt \leq$$

$$\int_{G \setminus E_0} \Phi(x_n(t) - x_0(t)) dt +$$

$$\int_{E_n} \Phi(|x_n(t)| + |x_0(t)|) dt < \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$\int_{E_0} \Phi(x_n(t)) dt + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

这表明 $I_\Phi(x_n - x_0) \rightarrow 0$ 。再由 $\Phi \in \Delta_2$ 得 $\|x_n - x_0\|_\Phi^s \rightarrow 0$ 。证毕。

引理 2 若 Φ 是 s -凸函数, 则 $\frac{\Phi(u)}{u^s}$ 是单调递

增函数。

证明: 对于任意的 $0 < u_1 < u_2$ 有

$$\Phi(u_1) = \Phi\left(\frac{u_2}{u_1} \cdot u_1\right) \leq \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^s \Phi(u_2)$$

$$\frac{\Phi(u_1)}{u_1^s} \leq \frac{\Phi(u_2)}{u_2^s}$$

下面我们来讨论 s -范数计算公式:

$$\text{情况 1: } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u^s} = +\infty$$

则对于 $\forall x \neq 0, \exists k > 0$, 满足:

$$\|x\|_{\Phi, s} = \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(kx))$$

证明: 记 $F(k) = \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(kx))$, 由于 Φ 是 s -

凸函数, 故 $F(k)$ 在 $(0, \theta(x))$ 内是连续函数。

记

$$\theta(x) = \inf\left\{\lambda > 0: I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) < +\infty\right\},$$

$$\lim_{k \rightarrow 0+0} F(k) = +\infty.$$

下面分两个情形讨论:

$$\textcircled{1} \lim_{k \rightarrow \theta(x)-0} I_\Phi(kx) = +\infty$$

此时有 $\lim_{k \rightarrow \theta(x)-0} F(k) = +\infty$, 由连续函数的最小值定理 $\exists k_0 \in (0, \theta(x))$ 满足:

$$\|x\|_{\Phi}^s = F(k_0)$$

② $\lim_{k \rightarrow \theta(x)-0} I_{\Phi}(kx) < \infty$, 此时有

$$\lim_{k \rightarrow \theta(x)-0} F(k) = \frac{1}{\theta(x)} \left(1 + \lim_{k \rightarrow \theta(x)-0} I_{\Phi}(\theta(x)) \right) \text{ 从而}$$

$F(k)$ 在 $(0, \theta(x)]$ 上连续。

同样利用连续函数的最小值定理 $\exists k_0 \in (0, \theta(x)]$, 满足 $\|x\|_{\Phi}^s = F(k_0)$ 。

由连续函数的最小值定理 $\exists k_0 \in (0, \theta(x))$, 满足:

$$F(k_0) = \min\{F(k) : k \in (0, \theta(x))\} =$$

$$\|x\|_{\Phi, s}$$

情况2: 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u^s} = A < +\infty$ 则 $\Phi \in \Delta_2$ 。

$$\text{证明: 因为 } \frac{\Phi(u)}{u^s} \uparrow A, \frac{A}{2} < \frac{\Phi(u)}{u^s} \leq A, \exists u_0 > 0,$$

$$u \geq u_0,$$

$$\frac{A}{2} u^s \leq \Phi(u) \leq A u^s$$

$$\Phi(2u) \leq A(2u)^s = 2^s A u^s \leq$$

$$2^s A \left(\frac{\Phi(u)}{A} \right) = 2^{s+1} \Phi(u)。$$

若:

$$k(x) = \emptyset, k(x) = \left\{ k > 0 : \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx)) = \right.$$

$\|x\|_{\Phi, s} \}$ 则:

$$\|x\|_{\Phi, s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} I_{\Phi}(kx(t)) dt}{k^s} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(kx(t))}{k^s} dt =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\text{Supp}(x)} \frac{\Phi(kx(t))}{k^s |x(t)|^s} |x(t)|^s dt$$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\text{Supp}(x)} A |x(t)|^s dt =$$

$$A \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^s dt$$

定理5 L_{Φ}^+ 上局部一致单调的充分必要条件是

$$\Phi \in \Delta_2。$$

证明: $\Rightarrow$ 若 $\Phi \notin \Delta_2$ 。由定理3(2) 存在一个元素 $x \in L_{\Phi, s}$, 满足 $I_{\Phi}(x) = 1, I_{\Phi}(\lambda x) = +\infty (\lambda > 1)$ 。

于是 $I_{\Phi}(x_n) \rightarrow 0$, 其中:

$$x_n = x \chi_{G_n}, G_n = \{t \in G : x(t) \geq n\}$$

及

$$I_{\Phi}(\lambda x_n) = +\infty (\lambda > 1)$$

从而

$$\|x_n\|_{\Phi}^s \leq (1 + I_{\Phi}(x_n)) \rightarrow 1$$

且

$$1 = \|x_n\|_{(\Phi)}^s \leq \|x_n\|_{\Phi}^s$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\Phi}^s = 1$$

又 $0 \leq x_n \leq x$, $\|x - x_n\|_{\Phi}^s \geq \|x - x_n\|_{(\Phi)}^s = 1$ 与 L_{Φ} 是上局部一致单调矛盾。

$\Leftarrow$ 设 $0 \leq x_n \leq x, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\Phi}^s = \|x\|_{\Phi}^s$ 。我们将证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\Phi}^s = 0$$

为了方便,不妨设 $\|x\|_{\Phi}^s = 1$ 。取 $k_n > 0, k > 0$ 满足:

$$\|x_n\|_{\Phi}^s = \frac{1}{k_n^s} (1 + I_{\Phi}(k_n x_n))$$

$$\|x\|_{\Phi}^s = \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx))$$

$$2 \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \|x\|_{\Phi}^s =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\Phi}^s + \|x\|_{\Phi}^s \geq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\|_{\Phi}^s \geq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \|x_n\|_{\Phi}^s = 2$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\|_{\Phi}^s = 2。$$

① 接下来证明 $kx_n - kx \xrightarrow{u} 0$ (依测度收敛)

由

$$1 \leftarrow \|x\|_{\Phi}^s \leq \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx_n)) \leq$$

$$\frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx)) = 1$$

知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx_n)) = 1。$$

假设 $kx_n - kx$ 不依测度收敛于0。则存在 $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, 不失一般性, 不妨设对任意的自然数满足:

$$m(\{t \in G : kx(t) - kx_n(t) \geq \varepsilon_0\}) \geq \delta_0 (n = 1, 2, \dots)$$

从而

$$1 \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} (1 + I_{\Phi}(kx_n)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} \left(1 + \int_{\{t \in G : kx(t) - kx_n(t) \geq \varepsilon_0\}} \Phi(kx_n(t)) dt + \right.$$

$$\int_{\{t \in G; kx(t) - kx_n(t) < \varepsilon_0\}} \Phi(kx_n(t)) dt \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} \left(1 + \int_{G_0} \Phi(kx(t) - \varepsilon_0) dt + \right.$$

$$\left. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} \int_{G \setminus G_0} \Phi(kx(t)) dt \right) <$$

$$\frac{1}{k^s} \left(1 + \int_G \Phi(kx(t)) dt \right) = 1$$

矛盾。

$$\textcircled{2} I_\Phi(k(x_n)) \rightarrow I_\Phi(kx)。$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\Phi(kx_n) = k^s - 1$$

及

$$1 = \|x\|_{(\Phi)}^s = \frac{1}{k^s} (1 + I_\Phi(kx))$$

知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\Phi(kx_n) = I_\Phi(kx)$$

由定理 4 知 $\|kx_n - kx\|_{(\Phi)}^s \rightarrow 0$ 即 $\|x_n - x\|_{(\Phi)}^s \rightarrow 0$ 。

证毕。

参 考 文 献:

- [1] BIRKHOFF G. Lattice Theory [M]. Providence: Amer. Math. Soc., 1967.
- [2] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986, 1.
- [3] ANDO T. Linear Functionals on Orlicz Space [J]. Nieuw Arch. Wisk, 1960, 8(3): 1.
- [4] RAO M M. Linear Functionals on Orlicz Space [J]. Nieuw Arch. Wisk, 1964(12): 77.
- [5] LÜ Y M, WANG J M, WANG T F. Monotone Coefficients and Monotonicity of Orlicz Spaces [J]. Revista Matemática Complutense, 1999, 12(1): 105.
- [6] CHEN S. Geometry of Orlicz Spaces [M]. Dissertationes Math. 1996.
- [7] MUSIELAK J. Orlicz Spaces and Modular Spaces [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1983, 1034(4): 1.

- [8] HUDZIK H, LIU X B, WANG T F. Points of Monotonicity in Musielak-Orlicz Function Spaces Endowed with the Luxemburg Norm [J]. Arch. Math., 2004, 82: 534.
- [9] HUDZIK H, SZYMASZKIEWICZ L, et al. Criteria for Monotonicity Properties of Musielak-Orlicz Spaces Equipped with the Amemiya Norm [J]. Math. Anal. Appl., 2005, 303: 376.
- [10] RAO M M, REN Z D. Theory of Orlicz Spaces [M]. Dekker, 1991.
- [11] CUI Y, DUAN L, HUDZIK H, et al. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces: Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5): 1796.
- [12] KURC W. Strictly and Uniformly Monotone Musielak-Orlicz Spaces and Applications to Best Approximation [J]. J. Approx. Theory, 1992, 69(2): 173.
- [13] HUDZIK H, KAMINSKA A, MASTYLO M. Monotonicity and Rotundity Properties in Banach Lattices [J]. Rocky Mountain J. Math., 2000, 30(3): 933.
- [14] HUDZIK H, KURC W. Monotonicity Properties of Musielak-Orlicz Spaces and Dominated Best Approximation in Banach Lattices [J]. J. Approx. Theory, 1998, 95: 353.
- [15] DOMINGUEZ T, LOPEZ G, HUDZIK H, et al. Complete Characterizations of Kadec-Klee Properties in Orlicz Spaces [J]. Houston J. Math, 2003, 29(4): 1027.
- [16] LEE HAN JU. Monotonicity and Complex Convexity in Banach Lattices [J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 307(1): 86.
- [17] CHEN S T, HE X, HUDZIK H. Monotonicity and Best Approximation in Banach Lattices [J]. Acta Math. Sin., 2009, 5(25): 785.
- [18] KURC W. A Dual Property to Uniform Monotonicity in Banach Lattices [J]. Collect. Math., 1993, 44: 155.
- [19] 贺鑫, 崔云安, 季丹丹. 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 函数空间的单调系数 [J]. 数学进展, 2019, 48(4): 459.
- HE Xin, CUI Yun an, JI Dandan. Monotone Coefficient of Orlicz function space with P-Amemiya Norm [J]. Advances in Mathematics, 2019, 48(4): 459.
- [20] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 序列空间的一致单调系数及应用 [J]. 应用数学学报, 1997(3): 362.
- CUI Yunan, WANG Tingfu. Uniform Monotonicity Coefficient of Orlicz Sequence Space and its Application [J]. Journal of Applied Mathematics, 1997(3): 362.

(编辑: 温泽宇)